

Resolución de Problemas y Algoritmos

Clase 17:
Resolución de problemas utilizando recursión



Dr. Diego R. García

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina



Motivación

- Dibujen tres escaleras diferentes.
- ¿cuántos escalones tienen?
- Imaginen un robot diseñado para subir una de esas escaleras.





Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 2

Motivación

Considere un escenario donde debemos programar un robot para subir una escalera, y se dispone de estas primitivas:

- **hay-un-solo-escalón:** retorna TRUE o FALSE
- **hay-más-de-un-escalón:** retorna TRUE o FALSE
- **subir-escalón:** hace al robot subir un escalón.





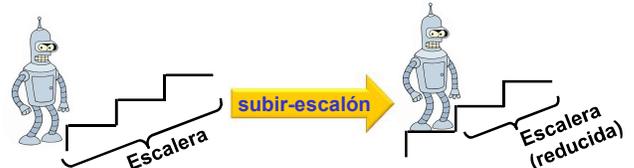
Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 3

Soluciones recursivas

Considere un escenario donde debemos programar un robot para subir una escalera, y se dispone de estas primitivas:

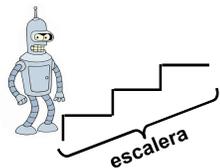
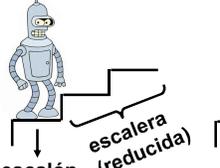
- **hay-un-solo-escalón:** retorna TRUE o FALSE
- **hay-más-de-un-escalón:** retorna TRUE o FALSE
- **subir-escalón:** hace al robot subir un escalón.

Observe el dibujo de la izquierda, donde el robot tiene por delante una escalera, si ejecuto **subir-escalón** el robot tendrá por delante una escalera (reducida en un escalón):



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 4

Soluciones recursivas

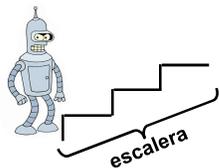
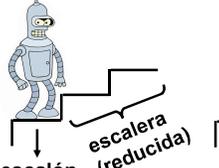

escalera escalera (reducida) escalera (de un escalón)

Una **escalera** puede verse entonces como: **un único escalón, o un escalón seguido de una escalera.**

Observación: en las tres situaciones de arriba, el robot siempre tiene una escalera por delante.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 5

Soluciones recursivas


escalera escalera (reducida) escalera (escalón)

Algoritmo: **subir-una-escalera**

Si **hay-un-solo-escalón** entonces: **subir-escalón**

Si **hay-más-de-un-escalón** entonces: **- subir-escalón**
- subir-una-escalera



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 6

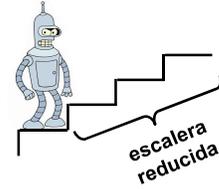
El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase". Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019

Conceptos: algoritmos recursivos

- **Recursión** es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición.
- Un **algoritmo** es **recursivo** si se define en términos de sí mismo.
- Un algoritmo **no debe entrar en una ejecución infinita**, por lo tanto....
- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
 - (a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y
 - (b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 7

Algoritmos recursivos



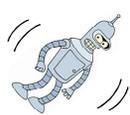
Algoritmo: **subir-una-escalera**
Si hay-un-solo-escalón
 entonces: **subir-escalón**
Si hay-más-de-un-escalón
 entonces: **- subir-escalón**
 - subir-una-escalera

OK

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
 - (a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y
 - (b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 8

Algoritmos recursivos



Propuesta 2 **subir-escalera**
-subir-escalón
-subir-escalera

MAL

¿Por qué es incorrecto?

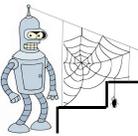
Falla porque no hay indicado un **caso base** (a).
 ¿Termina de ejecutarse?

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
 - (a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y
 - (b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 9

Algoritmos recursivos

¿Por qué es incorrecto?



Propuesta 3 **subir-la-escalera**
Si hay-más-de-un-escalón
 entonces: **- subir-la-escalera**
 - subir-escalón

MAL

Falla (b): la referencia a sí mismo **NO** es relativamente más sencilla o reducida (es igual).
 ¿Termina de ejecutarse? ¿sube un escalón?

- Un algoritmo recursivo **será válido**, si:
 - (a) **existe un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y
 - (b) existe un caso general donde la **referencia a sí mismo es sobre una instancia más sencilla (o reducida)** que el caso considerado.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 10

Concepto: planteo recursivo

La forma de resolver un problema puede **plantearse de manera recursiva** si se indica:

- (a) **un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y
- (b) **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

- De esta forma, al utilizar este tipo de planteo, el problema queda dividido en dos sub-problemas:
 - (1) caso base (también llamado caso trivial) y
 - (2) caso general (también llamado caso recursivo).
- Para indicar como resolver un problema de manera recursiva en RPA usaremos un planteo recursivo.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 11

Concepto: planteo recursivo

Un **planteo recursivo** es una solución a un problema donde:

- (a) se indica **un caso base** que **no** se define en términos de sí mismo, y además,
- (b) se indica **un caso general** donde se hace **referencia a sí mismo**, pero con una instancia reducida del problema.

Planteo recursivo: **nombre**

Caso base: Si...

Caso general: Si...

Aquí tienen que indicarse el o los casos de corte (donde la recursión termina).

Caso general: Si...

Aquí tiene que mostrarse que hay un progreso (se reducen los elementos sobre los que se está trabajando), y luego hacer referencia a "**nombre**" para que sea realmente recursivo.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 12

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase". Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019

Concepto: planteo recursivo

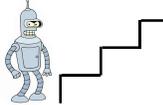
Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Observación: Una escalera puede verse como “un único escalón, o un escalón seguido de una escalera”

Planteo recursivo: subir una escalera

Caso base:
 si hay un solo escalón, subo el escalón.

Caso general: si hay más de un escalón, primero subo un escalón, y luego subir una escalera que tiene un escalón menos.



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 13

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para controlar un conjunto de 1 o más solicitudes de beca para asistir a un evento. (dibuje...)

Planteo recursivo: Controlar un conjunto de solicitudes

Caso base:
 si hay una sola solicitud, controlar dicha solicitud

Caso general: si hay más de una solicitud Controlar una solicitud y luego controlar un conjunto de solicitudes sin considerar la ya controlada.



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 14

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos. (dibuje)

• Generalmente los trabajos de impresión (jobs) son enviados a una cola de impresión (queue) antes de ser impresos. Se puede escribir una solución recursiva para el siguiente problema.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 15

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

Problema propuesto: escribir un planteo recursivo para imprimir todos los documentos de una cola de impresión que puede tener 1 o más documentos. (dibuje)

Planteo recursivo: Imprimir trabajos de la cola de impresión Q

Caso base:
 si hay un único trabajo en Q, enviar a la impresora

Caso general: si hay más de un trabajo en Q, sacar el primero de Q y enviar ia la impresora, y luego imprimir trabajos de la cola de impresión Q.



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 16

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

(¡para el 29!) Escribir un planteo recursivo para comer un plato de ñoquis (que no está vacío). ¡Dibuje!

Planteo recursivo: Comer un plato de ñoquis

Caso base:
 si hay un solo ñoqui en el plato, comer un ñoqui.

Caso general: si hay más de un ñoqui en el plato, comer un ñoqui y luego comer un plato de ñoquis.



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 17

Concepto: planteo recursivo

Un planteo recursivo es una solución a un problema donde:
 (a) se indica un caso base que no se define en términos de sí mismo, y además,
 (b) se indica un caso general donde se hace referencia a sí mismo, pero con una instancia reducida del problema.

(para acompañar los ñoquis) escribir un planteo recursivo para tomar de a sorbos una bebida que está en un vaso.

Planteo recursivo: tomar un vaso de bebida

Caso base:

Caso general:



Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 18

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 “Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase”. Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019

Soluciones recursivas en Pascal

- Los **procedimientos y funciones** de Pascal nos permitirán **implementar soluciones recursivas**.
- A continuación, vamos a mostrar ejemplos de funciones y procedimientos recursivos.
- Vamos a **usar ejemplos un poco más simples** que los problemas asociados a programar el comportamiento de robots.
- Como verá en otras materias y en su vida profesional, "recursión" es una herramienta mucho más general y poderosa que la "iteración".
- Verá, por ejemplo, que hay lenguajes de programación que solo tienen recursión.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 19

Tarea: indicar quien puede llamar a quien

Program Ejemplo; {para ejercitar el concepto de entorno}

```

PROCEDURE Dos (.....);
FUNCTION Tres (.....):.....;
begin ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá? end;
begin ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá? end;

PROCEDURE Uno (....);
begin
IF ... then ¿A qué func/proc puedo llamar desde acá?
end;

begin
...
end.
    
```

Recuerde que el identificador del procedimiento o función es parte del entorno donde se está definiendo.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 20

Metodología propuesta

1. Identificar **ejemplos significativos** que ayuden a entender el problema y su solución.
2. Realizar un **planteo recursivo** en el cual se distinga el "caso base", y el "caso general" (donde se define en términos de si mismo pero para una instancia más simple/reducida/menor del problema).
3. **Verificar que el planteo sea correcto** (con alguno de los ejemplos significativos).
4. Determinar si se realizará una **función** o un **procedimiento recursivo**, e implementarlo en Pascal.
5. Realizar la **traza** de la primitiva en Pascal.

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 21

Problema propuesto: 2^N

Escribir una función recursiva en Pascal para computar la función 2^N (N no negativo) utilizando multiplicación (*).

Para N no negativo, la función 2^N puede definirse recursivamente de la siguiente manera:

$$2^N = \begin{cases} 2^0 = 1 & (\text{si } N=0) \\ 2^N = 2 * 2^{N-1} & (\text{si } N>0) \end{cases}$$

Observe que ya está dividido en 2 casos.

Planteo recursivo para 2^N

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es: 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es: 2 * 2^{N-1}

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 22

Problema propuesto: 2^N

```

function dosAlaN (N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para 2 a la N (que no usa variables auxiliares)}
begin
if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
else dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {c. general}
end;
    
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo para 2^N

- Caso base: si N=0 entonces 2^N es 1
- Caso general: Si N>0 entonces 2^N es 2 * 2^{N-1}

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 23

```

program Prueba2; {Prueba otra versión de 2 a la N}
var exp, resu: integer;

function dosAlaN (N:integer):integer;
{Otra versión de una función recursiva para 2 a la N (que no usa variables auxiliares)}
begin
if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
else dosAlaN := 2 * dosAlaN(N-1); {general}
end;

{El programa valida la entrada y llama a la función recursiva}
begin
writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
repeat readln(exp) until exp>=0;
resu:=dosAlaN(exp); writeln(' 2 a la ',exp,' es ', resu );
end.
    
```

Realice trazas para exp=0 y exp=3.
¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp?

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 24

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 "Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase". Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019

Problema propuesto: 2^N

```

function dosAlaN (N:integer):integer;
var aux,nuevoN:integer;
begin {función recursiva para 2 a la N}
  if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
  else begin {caso general}
    nuevoN:=N-1;
    aux:= dosAlaN(nuevoN);
    dosAlaN:=2 * aux;
  end;
end;
    
```

Esta es una forma de implementar en Pascal la función recursiva que respeta el planteo recursivo (no es la única).

Planteo recursivo para 2^N

- Caso base: si $N=0$ entonces 2^N es 1
- Caso general: Si $N>0$ entonces 2^N es $2 * 2^{N-1}$

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 25

```

program Prueba; {Programa de prueba para 2 a la N}
var exp, resu: integer;
function dosAlaN (N:integer):integer;
var aux,nuevoN:integer;
begin {función recursiva para 2 a la N}
  if (N = 0) then dosAlaN :=1 {caso base}
  else begin {caso general}
    nuevoN:=N-1;
    aux:= dosAlaN(nuevoN);
    dosAlaN:=2 * aux;
  end;
end;
{El programa valida la entrada y llama a la función recursiva}
begin
  writeln(' Ingrese un exponente >= 0');
  repeat readln(exp) until exp>=0;
  resu:=dosAlaN(exp); writeln(' 2 a la ',exp,' es ', resu );
end.
    
```

Realice trazas para $exp=0$ y $exp=3$.
¿Cuántas veces se llama a la función dosAlaN con respecto al valor de exp ?

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 26

Traza ingresando 0

Prueba		dosAlaN	
exp	0	N	0
resu	1	aux	?

→ retorna 1

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 27

Traza ingresando 3

Prueba		dosAlaN		dosAlaN		dosAlaN		dosAlaN	
exp	3	N	3	N	2	N	1	N	0
resu	8	aux	4	aux	2	aux	1	aux	?

→ retorna 2*4 → retorna 2*2 → retorna 2*1 → retorna 1

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 28

Traza ingresando 0

Prueba		dosAlaN	
exp	0	N	0
resu	?	aux	?
		nuevoN	?

→ retorna 1

↓ EL TIEMPO AVANZA EN ESTA DIRECCIÓN

Prueba	
exp	0
resu	1

En ejecución, cada vez que se llama a un bloque (programa, función o procedimiento), se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada.

Al terminar la ejecución de una llamada, se eliminan de memoria esas variables locales y sus valores desaparecen

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 29

Traza ingresando 3 (primera parte)

Prueba		dosAlaN	
exp	3	N	3
resu	?	aux	?
		nuevoN	2

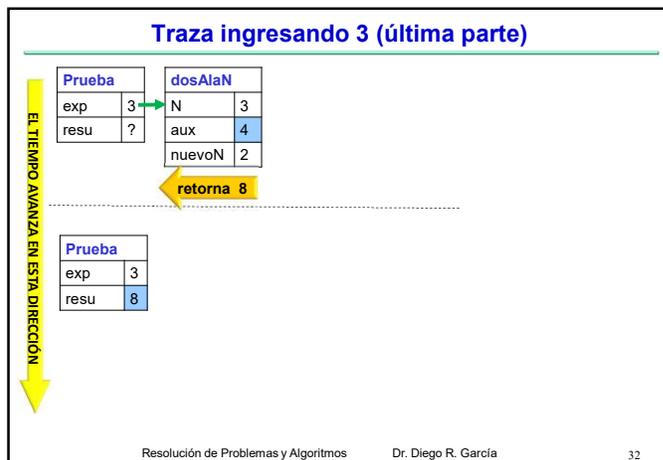
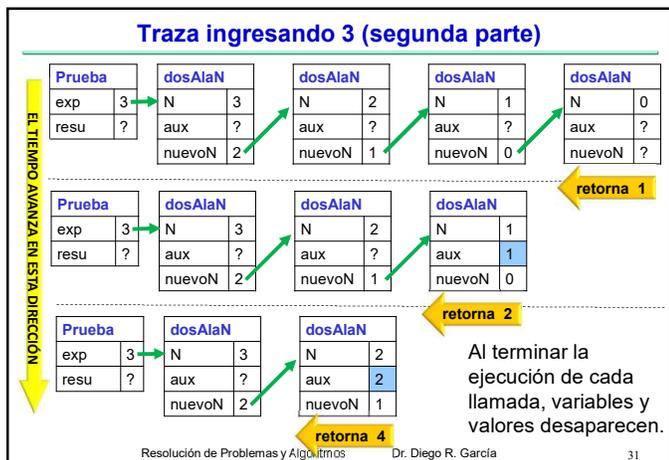
↓ EL TIEMPO AVANZA EN ESTA DIRECCIÓN

Prueba		dosAlaN		dosAlaN	
exp	3	N	3	N	2
resu	?	aux	?	aux	?
		nuevoN	2	nuevoN	1

En ejecución, cada vez que se llama a la función dosAlaN, se crean en memoria las variables locales y parámetros para esa llamada (no importa si la llamada es desde el programa o desde la misma función).

Resolución de Problemas y Algoritmos Dr. Diego R. García 30

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 “Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase”. Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019



Continuará ...

El uso total o parcial de este material está permitido siempre que se haga mención explícita de su fuente:
 “Resolución de Problemas y Algoritmos. Notas de Clase”. Diego R. García. Universidad Nacional del Sur. (c) 18/10/2019